§6.5 Projections orthogonales dans $\mathbb{R}^n$ (cas général)

Cours 12.1
03.12.24

NPO; RaQ

Thm 6.5.1

Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-esp. vectoriel, alors

1) $\forall y \in \mathbb{R}^n$, il existe une unique décomposition

$$y = \hat{y} + z \qquad (1)$$

avec $\hat{y} \in W$ et $z \in W^{\perp}$

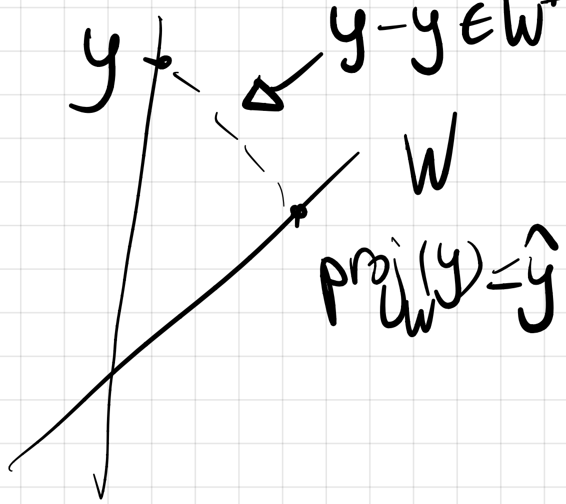
2) Si l'on a une base orthogonale ordonnée de W, disons $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_p)$ ($w_i \in W$)

alors $$\hat{y} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot w_i \qquad (2)$$

où $$\lambda_i = \frac{y \cdot w_i}{w_i \cdot w_i} \in \mathbb{R}$$

est la projection orthogonale de y sur W

càd $y - \hat{y} \in W^\perp$



<u>démo de 2)</u>

Posons $\hat{y} = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{y \cdot w_i}{w_i \cdot w_i} \right) w_i$

et soit $z = y - \hat{y}$ (bandenant on a $y = \hat{y} + z$)

et vérifions que $z \in W^\perp$

pour $j = 1, \dots, p$ fixé calculons

$$z \cdot w_j = \left(y - \sum_{i=1}^{p} \frac{y \cdot w_i}{w_i \cdot w_i} w_i \right) \cdot w_j$$

PS

$$= y \cdot w_j - \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \left(\frac{y \cdot w_i}{w_i \cdot w_i} \right) w_i \cdot w_j}_{= y \cdot w_j} = 0$$

cqfd 2)

Théorème de projection orthogonale 6.5.2

La construction du thm 6.5.1 donne une transformation linéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_W : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ y &\mapsto \mathrm{proj}_W(y) = \hat{y} \end{aligned}$$

qui

1) ne dépend pas de la base orthog. choisie de W

2) $\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_W) = W$

3) $\mathrm{Ker}(\mathrm{proj}_W) = W^\perp$

Ainsi par le TdR appliqué à proj_W :

$$\dim(\underbrace{\mathrm{Ker}(\mathrm{proj}_W)}_{W^\perp}) + \dim(\underbrace{\mathrm{Im}(\mathrm{proj}_W)}_{W}) = n$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(W^\perp) = n - \dim(W)}$$

Morale 6.5.3

Plus W est "grand", plus $W^\perp$ est "petit"

ex : $W = \{0\}$ $\quad W^\perp = \mathbb{R}^n$

$W = \mathbb{R}^n$ $\quad W^\perp = \{0\}$

(exercice : $U \subset W \subset V$ s.e.v de V

alors $W^\perp \subset U^\perp$)

En plus $\text{proj}_W \circ \text{proj}_W = \text{proj}_W$

et $\forall y \in W$ on a $\text{proj}_W(y) = y$

donc $E_1 = W$ = espace propre pour $\lambda = 1$

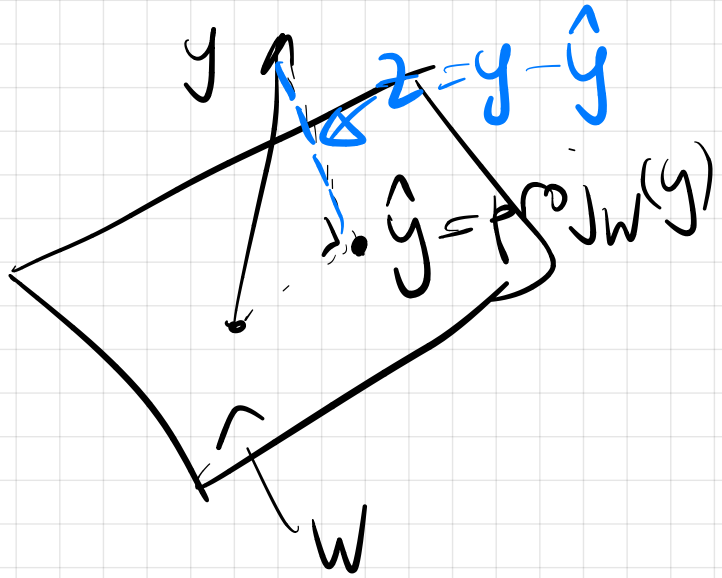
$E_0 = W^\perp$ = " " " $\lambda = 0$

ex 6.5.4 :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$W = \text{Vect}\{w_1, w_2\}$ Trouver $\text{proj}_W(y) = \hat{y}$



Remarque : ce $\hat{y}$ est le vecteur de W qui est le plus proche de y.

NB : $w_1 \cdot w_2 = 0$ $\quad w_1 \perp w_2$ orthogonaux ✓

mais $\|w_1\| \neq 1 \neq \|w_2\|$

Thm 6.5.1 $\Rightarrow$ $y = \hat{y} + z$ avec

$$\hat{y} = \left(\frac{y \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1}\right) w_1 + \left(\frac{y \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2}\right) w_2$$

calculs

$$= \frac{9}{30} w_1 + \frac{3}{6} w_2 = \frac{3}{10}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$ De plus

$$z = y - \hat{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$$

et surtout

$$\|z\| = \|y - \hat{y}\| = \text{distance de } y \text{ à } W$$

$$= \min_{w \in W} \|y - w\|$$

ex Fin 6.5.4

En effet on a le

Thm de la meilleure approximation quadratique
6.5.5

Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ S.E.V, $y \in \mathbb{R}^n$ et $\hat{y} = \mathrm{proj}_W(y)$. Alors, $\forall\, w \in W$ avec $w \neq \hat{y}$

on a $$\|y - \hat{y}\| < \|y - w\|$$

Morale : $\hat{y} = \mathrm{proj}_W(y)$ est le vecteur de W le plus proche de y

Corollaire 6.5.6 $\quad W \subseteq \mathbb{R}^n \quad w_i \in \mathbb{R}^n$

Si $(w_1, \dots, w_p)$ est une base orthonormée de W

alors $\hat{y} = \text{proj}_W(y) \overset{③}{=} \sum_{i=1}^{p} (y \cdot w_i) w_i$

$$\hat{y} = \underbrace{(y \cdot w_1)}_{\in \mathbb{R}} w_1 + \dots + \underbrace{(y \cdot w_p)}_{\in \mathbb{R}} w_p$$

De plus, soit $U = \left(w_1 \vdots \cdots \vdots w_p \right)_{n \times p}$

(on a vu que $U^T U = I_p$)

car vecteurs w_i orthonormés

alors $\hat{y} = (UU^T) y$

càd $\text{proj}_W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$y \mapsto (UU^T) y$$

Fin 6.5.6.

(justification sur demande)

Ex 6.5.7 :

$$U = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}_{3\times 2} \qquad W = \mathrm{Vect}\{w_1, w_2\}$$

$$ \underbrace{}_{w_1} \quad \underbrace{}_{w_2}$$

(w_1, w_2) est une b.o.n ordonnée de W

et donc $U^T U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

mais ⚠ U n'est pas une matrice orthogonale

(car U n'est pas carrée)

calculons $UU^T =$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \overset{\text{exo}}{=} \frac{1}{9} \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}}_{\text{proj}_W}$$

en prenant $y = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ calculons

$$\hat{y} = \text{proj}_W(y) = UU^T y \underset{\text{exo}}{=} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 18 \\ 36 \\ 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Seul problème : le thm de proj. orthog. dépend de l'existence d'une base orthogonale de W

<u>But</u>. Construire une base orthogonale de W ($\neq \{0\}$)

§ 6.6 Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

(Important)

<u>Thm 6.6.1</u> (Orthogonalisation à la G-S)

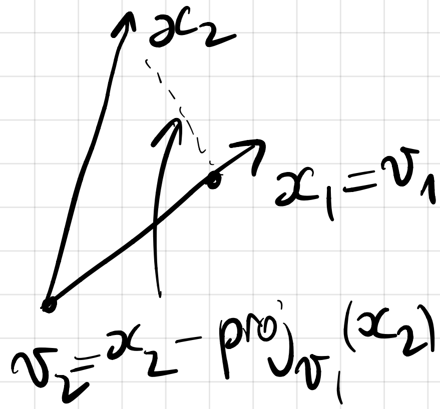
Soit $W \subseteq \mathbb{R}^n$ S.E.V avec $W \neq \{0\}$.

et soit $(x_1, \dots, x_p)$ une base ordonnée de W

On définit une nouvelle famille ordonnée par récurrence (finie) :

$$v_1 \overset{\text{déf}}{:=} x_1$$

$$v_2 \overset{\text{déf}}{=} x_2 - \underbrace{\left(\frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1}_{\text{proj}_{v_1}(x_2)}$$



de sorte qe $v_1 \perp v_2$

$$v_3 \overset{\text{déf}}{=} x_3 - \left(\frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 - \left(\frac{x_3 \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\right) v_2$$

(de sorte qe $v_3 \perp v_2$ et $v_3 \perp v_1$)

etc

$$\boxed{v_p = x_p - \left(\frac{x_p \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1 - \cdots - \left(\frac{x_p \cdot v_{p-1}}{v_{p-1} \cdot v_{p-1}}\right) v_{p-1}}$$

Alors $(v_1, \dots, v_p)$ est une base <u>orthogonale</u> de W

et par construction

$$\operatorname{Vect}\{x_1, \dots, x_k\} = \operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_k\}$$

$$\forall k \leq p$$

Fin GS 6.6.1

<u>Cor. 6.6.2</u> :

Tout ssev $W \subseteq \mathbb{R}^n$ (non-nul) possède une base ortho<u>normale</u>

(il suffit de prendre $u_i = \dfrac{v_i}{\|v_i\|}$ ci-dessus)

ex 6.6.3 :

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^4$$

$W = \mathrm{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$ $\dim W = 3$.

Trouver une base orthogonale de W :

1) $v_1 = x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $W_1 = \mathrm{Vect}\{v_1\}$

2) $v_2 = x_2 - \mathrm{proj}_{W_1}(x_2)$

$$= x_2 - \left(\frac{x_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right) v_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

2') facultatif : remplacer v_2 par λv_2 (avec $\lambda \neq 0$) pour simplifier les calculs

$\lambda = 4$ et on prend $v_2' = 4 v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_2' \perp v_1$$

3) $W_2 = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2'\} = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$

$= \mathrm{Vect}\{x_1, x_2)$

et soit

$$v_3 = x_3 - \mathrm{proj}_{W_2}(x_3)$$

$$= x_3 - \underbrace{\left(\frac{x_3 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\right)}_{2/4 = 1/2} v_1 - \underbrace{\left(\frac{x_3 \cdot v_2'}{v_2' \cdot v_2'}\right)}_{2/12 = 1/6} v_2'$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3' = 3 v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi une base orthog. de $W = \mathrm{Vect}\{x_1, x_2, x_3\}$

est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Base orthonormée de W :

$$\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2'}{\|v_2'\|}, \frac{v_3'}{\|v_3'\|}\right) = \left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Fin ex 6.6.3

Gram-Schmidt $\Rightarrow$ Thm Proj. orthogonale

Gram-Schmidt $\Rightarrow$ décomposition QR

Gram-Schmidt $\Downarrow$ régression linéaire

Gram-Schmidt $\Downarrow$ moindres carrés

Théorème 6.6.4 (Factorisation QR)

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ telle que les colonnes de A soient linéairement indépendantes (dans $\mathbb{R}^n$). Alors il existe

$Q \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (carrée) tq $A = QR$

et tq $\begin{cases} Q & \text{a des colonnes qui forment une base orthonormée de } \mathrm{Im}(A) \quad (1) \\ R & \text{triangulaire supérieure inversible (à coefficients diagonaux strictement positifs)} \quad (2) \end{cases}$

<u>idée de démo / processus :</u>

$$A = \left(a_1 \middle| \cdots \middle| a_n \right)_{m \times n}$$

$a_i =$ $i^{\text{ème}}$ colonne de A

$a_i \in \mathbb{R}^m$

$(a_1, \dots, a_n)$ lin indep. dans $\mathbb{R}^m$ par hyp.

(ils forment donc une base de $\mathrm{Im}(A)$)

$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Col}(A)$

GS appliqué à $W = \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Col}(A)$

et $(a_1, \dots, a_n)$

$\Rightarrow$ il existe b.o.n. de $\mathrm{Im}(A)$

$$(u_1, \dots, u_n)$$

et telle qe $\mathrm{Vect}\{u_1, \dots, u_k\} = \mathrm{Vect}\{a_1, \dots, a_k\}$

$\forall k \leq n$.

Posons $Q = \left(u_1 \mid \cdots \mid u_n \right)_{m \times n}$

par construction Q vérifie 1)

et donc $Q^T Q = I_n$

ensuite on pose $R = Q^T A$.

et on a bien $A = QR$. et R triangulaire

<u>Fin de l'idée.</u>

Ex 6.6.5 :

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{4\times 3} \\ \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \end{array}$$

Trouver $A = QR$

avec $Q^TQ = I_3$

et R triang. supérieur

recette ci-dessus + calculs précédents

$$Q = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1/2 & -3/\sqrt{12} & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & -2/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}_{4\times 3} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \end{array}$$

recette

$$R = Q^T A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

exo calculs

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 3/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Fin exemple.

Utilité QR:

ex 6.6.6

si l'on a $A = QR$ comme ci-dessus

alors

résoudre $Ax = b$

revient à résoudre $QRx = b$

posons $Rx = y$. Alors

R inversible

$$QRx = b \iff \begin{cases} Rx = y \\ \& \\ Qy = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = R^{-1}y \\ y = Q^T b \end{cases}$$

$Q^T Q = I_n$

Fin ex 6.6.6.